凸多面体をめぐる`数え上げ'の組合せ論(計算幾何学と離散幾何学)

日比, 孝之

数理解析研究所講究録
872巻 1994年 41-48

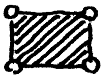
凸多面体をめぐる‘数え上げ’の組合せ論

日比孝之（北海道大学 理学部）
Takayuki Hibi

本講は論説[1]の要約であり，参考文献は[1]を参照されたい。また，当該研究の裏に潜む代数的背景はきわめて魅力的なものであって，それについては（次数付可換代数や被約homology群などの）基礎概念の定義や諸例を含めて（何ら予備知識を仮定せずに読めるように配慮した）文献[2]で克明に解説してある．さて，本講では凸多面体の面の数え上げ，及び凸多面体に含まれる格子点の数え上げを論じるが，前者はEulerの公式 $V-E+F=2$（1752年）を源とし，後者はMinkowski らによる「数の幾何」から派生したものであって，両者とも組合せ論における伝統的な話題であるが，最近これらと可換代数や代数幾何との相互関係が明らかにされ，境界領域における華々しい研究活動が展開されつつある．

1 凸多面体の面の数え上げ

次元 d の凸多面体 $P \subset \mathbb{R}^N$ があったとき，次元 i の

面の個数を $f_i=f_i(P)$ で表し，$f(P)=(f_0,f_1,\cdots,f_{d-1})$ を P の f-列と呼ぶ．特に，f_0（$=v$ と置く）は P の頂点の個数である．凸多面体 P が単体的であるとは，P の各面が単体であるときを言う．たとえば，図-1の八面体は単体的であるが，図-2の六面体は（を面に持つから）単体的でない．便宜上，$f_{-1}=1$ と置き，公式

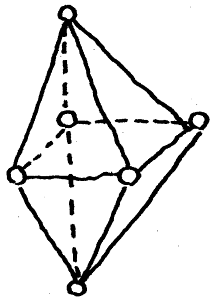


図-1

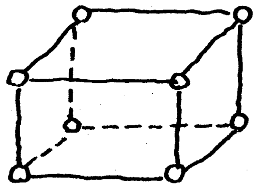


図-2

$$\sum_{i=0}^{d} f_{i-1}(x-1)^{d-i} = \sum_{i=0}^{d} h_i x^{d-i}$$

で P の h-列 $h(P)=(h_0,h_1,\cdots,h_d)$ を定義する．すると $h_0=1$，$h_1=v-d$ であって，更に $h_0+h_1+\cdots+h_d=f_{d-1}$ である．図-1の八面体の f-列，h-列は $(6,12,8)$，$(1,3,3,1)$ であり，図-2の六面体の f-列，h-列は $(8,12,6)$，$(1,5,-1,1)$ となる．もちろん，原理的には，f-列を知ることと h-列を知ることは同値である．

さて，次元 d の単体的凸多面体 $P\subset\mathbb{R}^N$ の f-列 $f(P)=(f_0,f_1,\cdots,f_{d-1})$ に関して，$f_0=v$ と置くと，

① Dehn-Sommerville 方程式

$$\sum_{j=i}^{d-1}(-1)^j\binom{j+1}{i+1}f_j=(-1)^{d-1}f_i,\ -1\leqq{}^\forall i\leqq d-1$$

② 上限定理 (McMullen, 1970年)

$$f_i\leqq f_i(C_{v,d}),\ 0\leqq{}^\forall i\leqq d-1$$

③ 下限定理 (Barnette, 1973年)

$$f_i\geqq\begin{cases}\binom{d}{i}v-\binom{d+1}{i+1}i & ,\ 0\leqq{}^\forall i\leqq d-2\\ (d-1)v-(d+1)(d-2) & ,\ i=d-1\end{cases}$$

が成立する。ここで $C(v,d)$ は巡回凸多面体と呼ばれるもので、それは moment curve $\{(t,t^2,\cdots,t^d)\in\mathbb{R}^d;t\in\mathbb{R}\}$ 上の相異なる v 個の点の凸閉包として定義される $\mathbb{R}^d$ の次元 d の単体的凸多面体で、その f-列は $f_i(C_{v,d})=\binom{v}{i+1}$, $0\leqq{}^\forall i<[d/2]$, である。更に、上記の f-列に関する関係式を h-列の言葉で表すと、

定理 次元 d の単体的凸多面体 $P\subset\mathbb{R}^N$ の h-列を $h(P)=(h_0,h_1,\cdots,h_d)$ とせよ。このとき、

① (Dehn-Sommerville 方程式) $h_i=h_{d-i}$ $(0\leqq{}^\forall i\leqq d)$;

② (上限定理) $h_i\leqq\binom{h_1+i-1}{i}$ $(1\leqq{}^\forall i\leqq d)$;

③ (下限定理) $h_1\leqq h_i$ $(2\leqq{}^\forall i<d)$.

なお，単体的凸多面体の h-列（従って f-列）の組合せ論的特徴付けは Billera-Lee と Stanley によって 1979年に得られている．

2 凸多面体のEhrhart多項式

凸多面体 $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^N$ が整であるとは，$\mathcal{P}$ の任意の頂点が $\mathbb{Z}^N$ の点であるときを言う．凸多面体 $\mathcal{P}$ の境界を $\partial\mathcal{P}$ で表す．次元 d の整凸多面体 $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^N$ があったとき，各整数 $n>0$ に対して，$n\mathcal{P} := \{n\alpha \,;\, \alpha \in \mathcal{P}\}$ と置き，函数 $i(\mathcal{P}, n)$ を $i(\mathcal{P}, n) := \#(n\mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^N)$ と定義する．すなわち，$i(\mathcal{P}, n)$ は $\mathcal{P}$ に含まれる有理点 $\alpha=(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_N)$ で $n\alpha_i \in \mathbb{Z}^N$ $(1 \leqq {}^\forall i \leqq N)$ となるものの個数である．たとえば，$N=d=3$ とし，$\mathcal{P}$ を頂点 $(0,0,0), (1,1,0), (1,0,1), (0,1,1)$ を持つ四面体とすると，$i(\mathcal{P}, n) = (n^3+3n^2+5n+3)/3$ となる．函数 $i(\mathcal{P}, n)$ の研究は *lycée* の先生であった Ehrhart の 1955年頃の仕事に源を発する．彼は $i(\mathcal{P}, n)$ に関して次のような興味深い結果を得た．

(2-1) $i(\mathcal{P}, n)$ は n に関して d 次の多項式である．

（従って，$i(\mathcal{P}, n)$ は任意の整数 n に対して定義することが可能である．）

(2-2) $i(\mathcal{P}, 0) = 1$ である.

(2-3) $(-1)^d i(\mathcal{P}, -n) = \#[n(\mathcal{P} - \partial\mathcal{P}) \cap \mathbb{Z}^N]$ が任意の整数 $n > 0$ に対して成立する.

我々は $i(\mathcal{P}, n)$ を $\mathcal{P}$ の Ehrhart 多項式と呼ぶ. 整数の数列 $\delta_0, \delta_1, \delta_2, \cdots$ を公式

$$(1-\lambda)^{d+1}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} i(\mathcal{P}, n)\lambda^n\right] = \sum_{i=0}^{\infty} \delta_i \lambda^i$$

で定義する. すると $\delta_0 = 1$, $\delta_1 = i(\mathcal{P}, 1) - (d+1)$ である. また, (2-1) と (2-2) , 更に, 母函数の簡単な性質によって, $i > d$ ならば $\delta_i = 0$ が従う. 他方, (2-3) より $\delta_d = \#[(\mathcal{P} - \partial\mathcal{P}) \cap \mathbb{Z}^N]$ である. 我々は数列 $\delta(\mathcal{P}) = (\delta_0, \delta_1, \cdots, \delta_d)$ を $\mathcal{P}$ の δ-列と呼ぶ. 当該研究の最終目標は, 整凸多面体の δ-列の組合せ論的特徴付けを探すことである.

本節では, 単体的凸多面体の h-列の Dehn-Sommerville 方程式, 上限定理, 下限定理の類似を δ-列で試みる. 簡単のため, $N = d$ とし, 更に, $\mathbb{R}^d$ の原点は $\mathcal{P}$ の内部 $\mathcal{P} - \partial\mathcal{P}$ に含まれると仮定する.

定理 次元 d の整凸多面体 $\mathcal{P}\subset\mathbb{R}^d$ は $\mathbb{R}^d$ の原点をその内部 $\mathcal{P}-\partial\mathcal{P}$ に含むと仮定し，$\delta(\mathcal{P})=(\delta_0,\delta_1,\cdots,\delta_d)$ を $\mathcal{P}$ の δ-列とせよ．このとき，

① 数列 $\delta(\mathcal{P})$ が対称，i.e., $\delta_i=\delta_{d-i}$ $(0\leqq {}^\forall i\leqq d)$ となるための必要十分条件は，$\mathcal{P}$ の双対凸多面体

$$\mathcal{P}^*=\left\{(x_1,\cdots,x_d)\in\mathbb{R}^d \;\middle|\; \sum_{i=1}^{d}x_iy_i\leqq 1\;,\;{}^\forall(y_1,\cdots,y_d)\in\mathcal{P}\right\}$$

が再び整となることである．

② 下限定理 $\delta_1\leqq\delta_i$, $2\leqq{}^\forall i<d$, が成立する．

証明の概略を①についてのみ述べよう．まず，(2-3)によって，等式

$$\sum_{n=1}^{\infty}\#[n(\mathcal{P}-\partial\mathcal{P})\cap\mathbb{Z}^d]\lambda^n=\lambda\frac{\delta_d+\delta_{d-1}\lambda+\cdots+\delta_0\lambda^d}{(1-\lambda)^{d+1}}$$

が成立する．すると $\delta(\mathcal{P})$ が対称となるための必要十分条件は $i(\mathcal{P},n)=\#[(n+1)(\mathcal{P}-\partial\mathcal{P})\cap\mathbb{Z}^d]$ が任意の非負整数 n に対して成立することである．
換言すれば，右図の斜線部分には整数点が存在しないことと同値である．この最後の条件が，

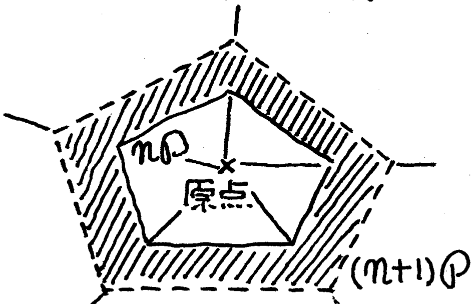


図-3

「超平面 $\mathcal{H}\subset\mathbb{R}^d$ が $\mathcal{P}$ の支持超平面で, $\mathcal{P}\cap\mathcal{H}$ が $\mathcal{P}$ の facet, i.e., $(d-1)$-次元の面ならば $\mathcal{H}$ の定義方程式は $\sum_{i=1}^d a_i x_i = 1$, $\forall a_i\in\mathbb{Z}$, と表せる」と同値であることは, 幾何学的には容易. 他方, 「　」の条件は, $\mathcal{P}^*$ の各頂点が $\mathbb{Z}^d$ の点であることに他ならない.

例 $\mathbb{R}^4$ において 8 個の点 $\pm(0,0,0,1), \pm(1,1,0,1), \pm(1,0,1,1), \pm(0,1,1,1)$ を頂点とする 4 次元の整凸多面体を $\mathcal{P}$ とすると, $\delta(\mathcal{P})=(1,4,22,4,1)$ となる. 従って, 上限定理の δ-列版は一般には成立しない.

ところで, 次元 d の (任意の) 整凸多面体 $\mathcal{P}\subset\mathbb{R}^d$ に関する次の条件 (A) と (B) を考えよう.

(A) 任意の整数 $n>0$ と任意の $\alpha\in n\mathcal{P}\cap\mathbb{Z}^d$ が与えられたとき, $\mathcal{P}\cap\mathbb{Z}^d$ の n 個の (必ずしも異なるとは限らない) 点 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ が存在して, $\alpha=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$ となる.

(B) $\mathcal{P}\cap\mathbb{Z}^d$ を頂点集合とする $\mathcal{P}$ の三角形分割で, 各 d 次元単体の体積が $1/d!$ となるものが存在する.

いま, $\mathcal{P}$ の δ-列を $\delta(\mathcal{P})=(\delta_0,\delta_1,\cdots,\delta_d)$ とするとき, 条件 (A) を仮定すれば, 上限定理の不等式 $\delta_i\leq\binom{\delta_1+i-1}{i}$,

$1 \leqq \forall i \leqq d$, が成立することが '代数的に' 証明できる. 他方, (B)⇒(A) は簡単な幾何的事実であるが, (A)⇒(B) が成立するか否かを筆者は知らない. 最後に, 上記の条件 (A) と (B) は計算幾何学の立場からはいくらか興味のある条件なのでしょうか?

参考文献

[1] 日比孝之, 単体的複体と凸多面体の組合せ論, 数学44 (1992), 147–160.

[2] T. Hibi, "Algebraic Combinatorics on Convex Polytopes," Carslaw, Sydney, 1992.

(平成5年5月26日)